Educación

Secretaría de Educación Pública

Programa de Estudios

de la UAC del Recurso Sociocognitivo de Pensamiento Matemático

Temas Selectos de Matemáticas II

Sexto Semestre

Clave: 30531-0005-23FE

Educación

Secretaría de Educación Pública

DGB

Primera edición, 2024

Secretaría de Educación Pública

Subsecretaría de Educación Media Superior

Dirección General del Bachillerato

Av. Revolución 1425, Col. Campestre.

Álvaro Obregón, C.P. 01040, Ciudad de México.

Distribución gratuita.

Prohibida su venta.

Contenido

Presentación

La Dirección General del Bachillerato (DGB) presenta las Progresiones de Aprendizaje de las diversas Áreas de Conocimiento y de los Recursos Sociocognitivos del Componente Fundamental Extendido, para el Plan de estudios propio de esta Dirección General.

Estas tienen su sustento, teórica y conceptual, en el modelo educativo del Marco Curricular Común de la Educación Media Superior (MCCEMS)[1] y dan cumplimiento a las atribuciones conferidas a esta Dirección General por el Reglamento Interior de la Secretaría de Educación Pública (SEP), en el cual se establece, en el Artículo 19 Fracciones I y II la importancia de "*proponer las normas pedagógicas, contenidos, planes y programas de estudio, métodos, materiales didácticos e instrumentos para la evaluación del aprendizaje del bachillerato general, en sus diferentes modalidades y enfoques, y difundir los vigentes*"; además de "*impulsar las reformas curriculares de los estudios de bachillerato que resulten necesarias para responder a los requerimientos de la sociedad del conocimiento y del desarrollo sustentable*"(RISEP, 2020).

En este sentido, los planteamientos del MCCEMS buscan una formación integral en el estudiantado mediante el desarrollo de la capacidad creadora, productiva, libre y digna del ser humano, conformando una ciudadanía que tenga amor al país, a su cultura e historia. Por ello, el Bachillerato General plantea las diversas Unidades de Aprendizaje Curricular (UAC) para que, con sus estudiantes egresados y egresadas contribuya al logro de su objetivo específico, el cual radica en la "*conformación de una ciudadanía reflexiva, con capacidad de formular y asumir responsabilidades de manera comunitaria, interactuar en contextos plurales y propositivos, trazarse metas y aprender de manera continua y colaborativa*".

En este contexto, se presentan la UAC Temas Selectos de Matemáticas II específica del Bachillerato General, con objetivos delimitados acorde a las características del subsistema y de la población a la cual se dirige. El documento se encuentra conformado por apartados mediante los cuales se describe no solo la fundamentación, sino los elementos claves para su implementación en el aula. El primero corresponde a la justificación de la UAC, qué lugar ocupa y cuál es su función al interior del currículo de la Educación Media Superior (EMS); el segundo, pertenece a los fundamentos donde se concentra la relevancia y propósitos, así como su impacto en la comunidad; el tercero se refiere a los conceptos básicos diferentes según Recurso Sociocognitivo de la UAC; y en el cuarto se desarrollan las progresiones de aprendizaje que se elaboraron de manera colegiada por personal docente de diversos estados con experiencia disciplinar, así como con personal colaborador de la Dirección General del Bachillerato, para finalmente contar con la revisión y validación por parte de la Coordinación Sectorial de Fortalecimiento Académico de la Subsecretaría de Educación Media Superior (SEMS).

---

[1] El cual puede ser consultado a través del siguiente enlace: https://educacionmediasuperior.sep.gob.mx/work/models/sems/Resource/13516/1/images/Documento%20base%20MCCEMS.pdf

Programa de Estudios de la Temas Selectos de Matemáticas II

Semestre	Sexto	
Créditos	8	
Componente	Fundamental extendido obligatorio	
Horas de Mediación Docente	**Semestral**	**Semanal**
	64	4

I. Introducción

Educar en el siglo XXI demanda una visión holística y transversal del entorno para hacer frente a los retos del futuro, modificando el presente a través de los aprendizajes y experiencias del pasado, para ello, la matemática proporciona relaciones abstractas que van más allá de simples algoritmos. La construcción de ideas matemáticas en el estudiantado está asociada a factores tales como observación, imaginación, intuición, representación y comunicación. Es el resultado de aproximaciones sucesivas construidas a través de significados aritméticos, algebraicos, geométricos, estocásticos y variacionales, considerando aspectos culturales, históricos y sociales.

En Temas Selectos de Matemáticas II se busca dar otra perspectiva del cálculo al estudiantado y ahondar en su estudio, retomando y dando seguimiento a contenidos de UAC previas, especialmente a lo abordado en Pensamiento Matemático III y Temas Selectos de Matemáticas I. Primero se presenta el planteamiento de Sistemas Dinámicos Discretos, considerando composiciones de funciones y se ahondan en ideas de caos y fractalidad para posteriormente dar continuidad a conceptos planteados previamente, como lo son el Teorema Fundamental del Cálculo y con ello profundizar en el estudio de la integral, el cálculo del área debajo de una curva y con ello abordar ideas fundamentales que dan surgimiento a las ecuaciones diferenciales y algunos métodos numéricos útiles para el estudiantado. Las anotaciones didácticas están orientadas para que se deduzca el enfoque adecuado que permita trabajar la estructura, el orden y las relaciones a través de la profundización de conceptos formales utilizados en el recurso sociocognitivo de Pensamiento Matemático, considerando particularmente elementos del Cálculo Diferencial e Integral, así como algunas ideas de Análisis Matemático.

Estas anotaciones pueden encontrarse a lo largo de este documento y son fundamentales para lograr dimensionar el nivel con que se estará abordando cada progresión.

La UAC de Temas Selectos de Matemáticas II, se ubica dentro del componente de formación fundamental extendido obligatorio de sexto semestre y surge para complementar el estudio de las problemáticas centrales de los programas de estudio de Pensamiento Matemático I, II y III, así como de Temas Selectos de Matemáticas I. En esta UAC se busca establecer el aula como laboratorio social, permitiendo la transversalidad mediante los Recursos Sociocognitivos, Socioemocionales y en conjunto con todas las Áreas de Conocimiento.

Esta UAC promueve que las y los estudiantes se interesen, reflexionen y generen propuestas en las problemáticas del contexto social, para lo cual, considera la investigación como una actividad que le permitirá dotarlos de una metodología, donde de manera activa, a través del desarrollo de la misma, logre formular propuestas de cambio y transformación social, promoviendo un pensamiento reflexivo, crítico y plural.

Con el planteamiento de las progresiones de aprendizaje se especifica el qué enseñar, aprender y el qué desarrollar en la presente UAC para todos los subsistemas de la EMS en el país, sin hacer distinción de las modalidades del bachillerato. A continuación, se presentan cada una de las 7 progresiones que corresponde al programa de estudios de Temas Selectos de Matemáticas I, así como las relaciones con las metas, categorías y subcategorías.

Unidades de Aprendizaje Curricular	Semestre	Horas Semanales			Horas Semestrales			Créditos
		MD	EI	Total	MD	EI	Total	
Temas Selectos de Matemáticas II	4	4	1	5	64	16	80	8

II. Aprendizajes de trayectoria

Temas Selectos de Matemáticas II, al formar parte del Recurso sociocognitivo de Pensamiento Matemático, considera los mismos aprendizajes de trayectoria, los cuales se explicitan en el acuerdo secretarial 09/08/23 y se presentan a continuación:

- Valora la aplicación de procedimientos automáticos y algorítmicos, así como la interpretación de sus resultados para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas matemáticos, de áreas del conocimiento y de su vida personal.

- Adopta procesos de razonamiento matemático tanto intuitivos como formales tales como observar, intuir, conjeturar y argumentar, para relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades y de la vida cotidiana).

- Modela y propone soluciones a problemas tanto teóricos como de su entorno, empleando lenguaje y técnicas matemáticas.

- Explica el planteamiento de posibles soluciones a problemas y la descripción de situaciones en el contexto que les dio origen empleando lenguaje matemático y lo comunica a sus pares para analizar su pertinencia.

III. Progresiones de aprendizaje, metas de aprendizaje, categorías y subcategorías

Análogamente a los aprendizajes de trayectoria, Temas Selectos de Matemáticas I al formar parte del Recurso sociocognitivo de Pensamiento Matemático, considera las mismas categorías, subcategorías y metas de aprendizaje, las cuales se explicitan en el acuerdo secretarial 09/08/23 y se presentan a continuación:

Categorías y subcategorías

Categoría I. Procedural

Esta categoría engloba los procesos propios de la ejecución mecanizada e incluso automatizada de algoritmos y procedimientos, así como también el acto de interpretar los resultados que arrojan dichos procedimientos algorítmicos.

Subcategorías

Elementos aritméticos-algebraicos

Comprende los recursos procedurales involucrados en la manipulación tanto aritmética como algebraica de objetos matemáticos.

Elementos geométricos

Se refiere a la manipulación de objetos geométricos tales como puntos, líneas, figuras, planos, etc. Algunas veces relacionados con propiedades o con sistemas de referencia mediante el uso de coordenadas y/o magnitudes.

Elementos variacionales

Comprende los recursos procedurales involucrados en la manipulación de objetos matemáticos relacionados con la variación tales como funciones y límites.

Manejo de datos e incertidumbre

Considera el uso e interpretación de datos y el cálculo de posibilidades. Incluye desde la recolección de datos, la revisión de los términos básicos utilizados en probabilidad y estadística y las formas en que se recolectan datos a partir de una necesidad específica, así como las ventajas de elegir una forma para organizarlos, interpretarlos y utilizarlos en la toma de decisiones en ambientes de incertidumbre.

La primera categoría constituye un grupo inicial de recursos y corresponden al dominio de los recursos procedurales, lleva a describir y ejecutar procedimientos matemáticos, en forma sintética o extendida, automatizada o como una secuencia razonada de pasos. En las diferentes áreas de la matemática hay formas de hacer, de resolver, de simplificar, etc., por eso su contenido se vuelve un valioso recurso al emplearlos en la solución de problemas y en la toma de decisiones.

Categoría 2. Procesos de Intuición y razonamiento

Esta categoría incluye procesos fundamentales en el quehacer matemático como lo son la observación, la intuición, el acto de formular conjeturas y la argumentación. La matemática tiene una cualidad dual: la intuición y la formalidad. Todo descubrimiento o creación matemática parte de la intuición, de un chispazo que resulta complicado de describir, el cual no se articula a través de una serie de pasos lógicos secuenciales. La forma en que una idea nace casi nunca es lógica. Por otro lado, la matemática exige, para poder continuar desarrollándose, la formalización y presentación lógica y formal de aquellas ideas que el individuo aprehendió intuitivamente; de suerte tal que existe una especie de proceso dialéctico en el desarrollo de la matemática que va de la intuición a la formalidad y que se repite constantemente.

Es importante mencionar que los procesos cognitivos que se buscan desarrollar en el estudiantado en esta etapa no pretenden tener el mismo acabado que aquellos que desarrollan los profesionales de la matemática, pero sí ser fundamentalmente dichos procesos, pero a un nivel de complejidad adecuado al desarrollo del estudiante.

Subcategorías

Capacidad para observar y conjeturar

Los descubrimientos a los que ha llegado el ser humano se han realizado después de que ha sido capaz de observar algún elemento crucial de su objeto de estudio. A partir de sus observaciones y de su experiencia previa, el ser humano lanza conjeturas: afirmaciones que pueden ser verdaderas o falsas y que demandan una mayor investigación y reflexión.

Pensamiento intuitivo

Muy relacionada con la subcategoría anterior, la subcategoría de Pensamiento intuitivo engloba aquellos procesos cognitivos por los cuales el ser humano comprende en una primera aproximación los objetos matemáticos y fenómenos de diversa índole, no necesariamente teórica.

Pensamiento formal

La matemática para poder continuar desarrollándose necesita una presentación formal. Con esta subcategoría estamos englobando aquellas habilidades involucradas al producir argumentaciones rigurosas en favor o en contra de afirmaciones tanto matemáticas como de diversa naturaleza.

La propuesta es llevar al estudiantado a participar de estos procesos cognitivos. Un estudiante puede observar, intuir, conjeturar y argumentar, evidentemente no al nivel de complejidad con que realiza estas acciones la o el investigador de matemáticas, pero la diferencia es más de orden cuantitativo que cualitativo.

Categoría 3. Solución de problemas y modelación

Esta categoría engloba aquellos procesos que suceden cuando describimos un fenómeno utilizando técnicas y lenguaje matemático o resolvemos un problema, entendiendo a este último como un planteamiento al que no se le puede dar respuesta empleando procedimientos mecánicos (obsérvese cómo esta definición de problema depende y varía de individuo a individuo). La modelación se entiende como el uso de la matemática y su lenguaje en la descripción de fenómenos de diversa naturaleza.

Subcategorías

Uso de Modelos

Emplear una representación abstracta, conceptual, gráfica o simbólica para describir un fenómeno o de un proceso, verificando el cumplimiento de las hipótesis necesarias, para analizar la relación entre sus variables lo que permite comprender fenómenos naturales, sociales, físicos y otros y además, resolver problemas.

Construcción de Modelos

Implica, entre otras cosas, la búsqueda, delimitación y determinación de las variables adecuadas para describir la situación, problema o fenómeno estudiado.

Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios

La heurística se refiere a estrategias, métodos, criterios o astucias utilizados para hacer posible la solución de problemas complejos. Un procedimiento es no rutinario cuando no basta con aplicar una regla o un método mecanizado o de carácter algorítmico o establecido, sino que requiere cierta intuición y búsqueda poniendo en práctica un conjunto de conocimientos y de experiencias anteriores.

La tercera categoría dota de recursos para solucionar problemas y plantear modelos, desde una perspectiva global, estos recursos son útiles para comprender el problema, diseñar y ejecutar un plan y probar el resultado. Con estos recursos se resuelven situaciones problemáticas y describen fenómenos empleando el pensamiento matemático.

Categoría 4. Interacción y lenguaje matemático

La matemática posee un lenguaje, el cual resulta ser riguroso, y que, a su vez, convive y se comunica a través de diversos lenguajes naturales (español, lenguas indígenas, inglés, lengua de señas, etc.) Esta categoría engloba las consideraciones propias que el o la practicante del pensamiento matemático debe tener en mente cuando comunica sus ideas, entendiendo que un lenguaje natural y un lenguaje formal tienen puntos de convergencia y puntos de divergencia; en ambos casos buscamos que el estudiantado sea riguroso con el uso de estos lenguajes.

Subcategorías

Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico

Esta subcategoría se articula al establecer jerarquías, agrupaciones, composiciones, el uso formal de símbolos e imágenes respetando las propiedades y reglas.

Negociación de significados

Esta subcategoría se aplica al revisar tanto individual como colectivamente los significados de las expresiones, sus posibles sentidos e interpretaciones, así como la generación de expresiones y representaciones formales asociadas.

Ambiente matemático de comunicación

Se describe así al ambiente generado para transmitir ideas, inquietudes, conjeturas y conceptos matemáticos empleando lenguajes naturales y formales.

La cuarta categoría aporta al individuo recursos para emplear el lenguaje matemático y para interactuar con personas de su entorno dando una dimensión social al aprendizaje.

Metas de aprendizaje

Metas de Aprendizaje			
C1M1	**C2M1**	**C3M1**	**C4M1**
Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.	Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.	Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural
C1M2	**C2M2**	**C3M2**	**C4M2**
Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.	Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación.	Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.	Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.
C1M3	**C2M3**	**C3M3**	**C4M3**

Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares.	Compara hechos, opiniones o afirmaciones para organizarlos en formas lógicas útiles en la solución de problemas y explicación de situaciones y fenómenos.	Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del pensamiento matemático, de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno.	Organiza los procedimientos empleados en la solución de un problema a través de argumentos formales para someterlo a debate o evaluación.
	C2M4	**C3M4**	
	Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.	Construye y plantea posibles soluciones a problemas de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno, empleando técnicas y lenguaje matemático.	

Progresiones de Aprendizaje

Las Progresiones de Aprendizaje son unidades didácticas innovadoras y flexibles para la descripción secuencial de los aprendizajes asociados a la comprensión y solución de necesidades y problemáticas personales y/o sociales (DOF, 09/08/23).

Temas Selectos de Matemáticas I

Progresión 1: Examina una problemática en la que se necesite aplicar la composición de funciones de variable real, particularmente la composición de una función consigo misma, con lo cual explora la definición de sistema dinámico discreto y algunos ejemplos sencillos que remitan a la recurrencia y la autosimilitud, posteriormente observa propiedades y algunos resultados históricamente importantes que han dado solución a problemas o situaciones reales como lo son el Atractor de Lorenz o el estudio del Caos.

Metas	Categorías	Subcategorías
C1M1. Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno. **C1M2.** Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.	**C1.** Procedural	**S1.** Elementos aritmético-algebraicos **S2.** Elementos geométricos
C2M1. Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo. **C2M2.** Desarrolla la percepción y	**C2.** Procesos de intuición y razonamiento	**S1.** Capacidad para observar y conjeturar **S2.** Pensamiento intuitivo **S3.** Pensamiento formal

la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación. **C2M3.** Compara hechos, opiniones o afirmaciones para organizarlos en formas lógicas útiles en la solución de problemas y explicación de situaciones y fenómenos.		
C4M1. Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural	**C4.** Interacción y lenguaje matemático	**S1.** Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico **S2.** Negociación de significados **S3.** Ambiente matemático de comunicación

Anotaciones didácticas:

Se sugiere aprovechar esta progresión para recuperar conocimientos de Pensamiento Matemático II y III, respecto a operaciones con funciones y composición de funciones.

No se pretende que se solucionen sistemas dinámicos discretos o que se aborde un estudio formal de estos, sino que se presente la definición y se observe la recurrencia de la composición de una función consigo misma y cómo esto puede dar paso a generar comportamientos interesantes o fractales.

Concretamente, se sugiere abordar la definición siguiente:
Sea $f: X \to X$ función continua en un espacio métrico X. Un sistema dinámico discreto se define como el par (X,f) donde se considera la composición de una función consigo misma.
Para $k \in N$, se define la k−ésima iteración de f como la composición de f consigo misma k veces se denotará como f^k. Es decir que,

$$f^2 = f \circ f$$
$$f^2 = f \circ f \circ f$$
$$\vdots$$
$$f^{k+1} = f^k \circ f$$

Se sugiere explorar algunos sistemas dinámicos sencillos y que permitan el acceso a la comprensión de ellos, por ejemplo, como primera aproximación, puede tomarse una calculadora y tomar cualquier valor numérico inicial x_0, aplicarle a este, la función coseno reiteradas veces y observar qué ocurre, es decir, realizar las operaciones,

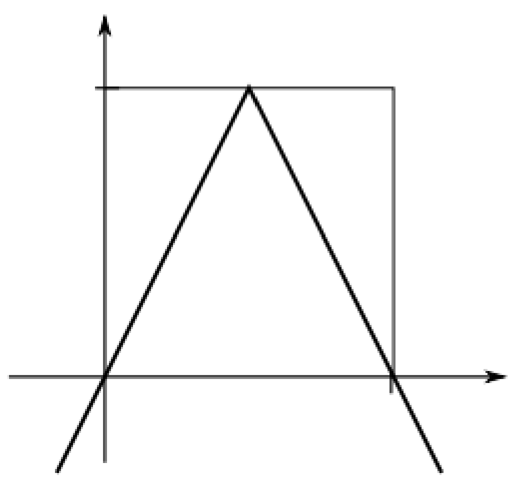
$$cos(x_0)$$
$$cos(cos(x_0))$$
$$cos(cos(cos(x_0)))...$$

observar que, este proceso converge al valor 0.739085 sin importar el valor de x_0. A partir de ello, puede comenzarse a trabajar las ideas fundamentales de los sistemas dinámicos discretos.

Otro sistema dinámico interesante y que puede abordarse es el sistema dinámico de “La Tienda”, definida por la función, T:R→R,

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \leq \frac{1}{2}, \\ 2-2x, & \text{si } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

la cual genera la siguiente gráfica:



puede usarse como un ejemplo para observar algunas órbitas y sus periodos, para acercarse a la idea de autosimilitud.

Otro ejemplo que puede ser interesante y se puede abordar es la Herradura de Smale, en general, se busca que a través de estos ejemplos se introduzca la idea general del sistema dinámico, para llegar a revisar algunas propiedades interesantes como son el caos, que puede generarse también al iterar una función en dos calculadoras diferentes, debido al truncamiento de los dígitos, obteniendo después de algunas iteraciones resultados completamente distintos, llegando así a ideas como la sensibilidad a condiciones iniciales de un sistema.

Finalmente se sugiere aprovechar la situación para hablar del atractor de Lorenz, su relación con el estudio y explicación del caos y abordar la famosa frase expresada por Lorenz "el aleteo de una mariposa en Brasil podría desencadenar un tornado en Texas" lo cual de partida a investigar el efecto mariposa.

Se sugiere revisar el siguiente documento donde se encuentra un ejemplo más de sistemas dinámicos con una aplicación a neuronas, así como definiciones importantes respecto a sistemas dinámicos.

https://cdigital.uv.mx/server/api/core/bitstreams/45c6f402-a578-4e70-8e72-f73d6e043238/content

Progresión 2. Revisa los conceptos de sucesión y serie, examinando algunos ejemplos (sucesiones aritméticas, geométricas, Fibonacci, serie aritmética y geométrica) con los cuales puede observar los conceptos de límite y convergencia e identifica estructuras en su entorno que poseen patrones, comportamientos repetitivos o fractales, apoyándose de herramientas tecnológicas disponibles.

Metas	Categorías	Subcategorías
C1M1. Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno. **C1M2.** Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto. **C1M3.** Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas	**C1.** Procedural	**S1.** Elementos aritmético-algebraicos **S2.** Elementos geométricos **S3.** Elementos variacionales

utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares		
C2M1. Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo. **C2M2.** Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación.	**C2.** Procesos de intuición y razonamiento	**S1.** Capacidad para observar y conjeturar **S2.** Pensamiento intuitivo **S3.** Pensamiento formal
C4M1. Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural	**C4.** Interacción y lenguaje matemático	**S1.** Registro escrito, simbólico algebraico e iconográfico

Anotaciones didácticas:

Se recomienda no concentrar toda la progresión sólo en estudiar casos de sucesiones numéricas y la obtención de expresiones generales algebraicas, sino, buscar ahondar en la exploración de otros entes y abonar a contenidos o conceptos explorados en UAC anteriores, por ejemplo, examinar con detalle la definición de límite y la idea de convergencia de sucesiones revisando algunos ejemplos sencillos, tales como,

$$S_n = \frac{1}{n}.$$

Lo mismo puede considerarse con el estudio de series convergentes, se sugiere revisar ejemplos sencillos y observar bajo qué criterios algunas series convergen.

Más aún, se propone considerar conjuntos de Sierpinsky (como el triángulo y la alfombra) y plantear el análisis del cálculo del área y perímetro, observar la convergencia del área y la no convergencia del perímetro.

Progresión 3: Aproxima el área debajo de una curva utilizando el método de Suma de Riemann considerando una suma finita de términos. Luego emplea la idea del límite al considerar una cantidad infinita de ellos con lo cual calcula el área debajo de la curva observando cómo ello se concreta en la integral definida. Interpreta esta suma de términos como un área infinitesimal y observa su utilidad en la solución de problemas de otras Unidades de Aprendizaje Curricular, aprovechando los recursos tecnológicos disponibles.

Metas	Categorías	Subcategorías
C1M1. Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno. **C1M2.** Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto. **C1M3.** Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares	**C1.** Procedural	**S1.** Elementos aritmético-algebraicos **S2.** Elementos geométricos **S3.** Elementos variacionales
C2M1. Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a	**C2.** Procesos de intuición y razonamiento	**S1.** Capacidad para observar y conjeturar **S2.** Pensamiento intuitivo **S3.** Pensamiento formal

entenderlo. **C2M2.** Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación.		
C3M1. Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto. **C3M3**. Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del pensamiento matemático, de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno.	**C3.** Solución de problemas y modelación	**S1.** Uso de modelos **S3.** Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios

Anotaciones didácticas:

Se busca que el abordaje de esta progresión se haga considerando que el área de figuras no regulares se calcula colocando figuras regulares que no se intersequen, en particular rectángulos. Se puede retomar el concepto de “tapizar” con figuras regulares abordado en la progresión 9 de Pensamiento Matemático II, es decir, el cálculo del área de polígonos irregulares se hace a partir de considerar polígonos regulares, la idea del cálculo del área debajo de una curva es una analogía de ello. Al mismo tiempo se debe tener cuidado con el uso de la palabra área, para referirse a un número o concepto métrico y la palabra superficie, debido a que a veces son usadas como sinónimos.

En el cálculo del área debajo de una curva es importante hacer notar al estudiantado cómo el área por exceso o por defecto generada por los rectángulos considerados en la curva tiene relación con la constante de integración C, al mismo tiempo que se considera la primitiva y la derivada de la constante.

Se debe aprovechar esta progresión para fomentar la discusión de áreas negativas, ¿qué ocurre cuando se calcula la integral de la función $f(x) = x$ de -1 a 1?, es un momento importante para mostrar al estudiantado lo que ocurre con áreas por debajo y por arriba del eje x. ¿por qué ocurre esto?

Finalmente, otra discusión interesante que puede surgir en este punto es el cálculo de integrales sobre intervalos que contienen discontinuidades, por ejemplo ¿qué ocurre con la integral de $f(x) = \frac{1}{x^3} + 3x - 5$? ¿Se puede usar software para calcularla?

Progresión 4: Calcula integrales indefinidas de funciones polinomiales de manera analítica, en particular de funciones lineales y cuadráticas, considerando las expresiones correspondientes y observando la relación con el cálculo de área debajo de la gráfica considerando la integral definida apoyado de recursos tecnológicos, con lo cual revisa algunas propiedades de la integral que le permitan entenderla desde una perspectiva más formal.

Metas	Categorías	Subcategorías
C1M1. Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno. **C1M2.** Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto. **C1M3.** Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares	**C1.** Procedural	**S1.** Elementos aritmético-algebraicos **S2.** Elementos geométricos **S3.** Elementos variacionales

C2M2. Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación. **C2M3.** Compara hechos, opiniones o afirmaciones para organizarlos en formas lógicas útiles en la solución de problemas y explicación de situaciones y fenómenos. **C2M4.** Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.	**C2.** Procesos de intuición y razonamiento	**S1.** Capacidad para observar y conjeturar **S2.** Pensamiento intuitivo **S3.** Pensamiento formal

Anotaciones didácticas:

Además del cálculo de integrales básicas y polinomiales en esta progresión se busca explorar algunas propiedades de la integral, se sugiere abordar dichas propiedades mediante el planteamiento de preguntas que propicien la exploración y no sólo mostrarlas como un conjunto de reglas o ecuaciones, por ejemplo, plantear preguntas como ¿la suma de dos funciones integrables es integrable?, se sugiere analizar primero este tipo de planteamientos de manera gráfica, puede usarse software para facilitar el proceso, plantear ideas del recíproco de estas mismas propiedades, es decir, ¿el recíproco de este planteamiento se cumple?, es decir, si se tiene una función integrable con varios términos ¿sus sumandos son integrables?, fomentar esta discusión en el estudiantado puede resultar una excelente oportunidad para despertar el interés en el estudio de las propiedades y entender a la integral como un operador lineal, más allá de sólo tener un listado de ecuaciones .

Otra propiedad interesante que puede analizarse es la siguiente,

¿si se tiene que

$$f(x) \leq g(x), \forall x$$

entonces se cumple

$$\int f(x) \leq \int g(x)?$$

¿la integral indefinida mantiene esa desigualdad? ¿puede garantizarse sin definir algún intervalo? ¿la integral definida en un intervalo *[a,b]* la mantiene?

Resulta entonces interesante plantear estos cuestionamientos al estudiantado y promover su análisis gráfico, para posteriormente formalizarlo en un enunciado y el entendimiento de la integral como área debajo de una curva.

Progresión 5: Reconoce a la derivada y la integral como procesos inversos a partir del análisis de la antiderivada lo cual le permita establecer el Teorema Fundamental del Cálculo, con ello observa la relación que existe entre la gráfica de una función, la gráfica de su derivada y la gráfica de su antiderivada, establece cómo el cambio de la pendiente en cada punto de la gráfica de la derivada refiere al cambio instantáneo de la gráfica principal y cómo este comportamiento también se da entre la gráfica de la función principal respecto a la gráfica de su antiderivada lo anterior con la finalidad de abordar la solución de problemáticas de otras Unidades de Aprendizaje Curricular haciendo uso de recursos tecnológicos disponibles.

Metas	Categorías	Subcategorías
C1M1. Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno. **C1M2.** Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.	**C1.** Procedural	**S1.** Elementos aritmético-algebraicos **S2.** Elementos geométricos **S3.** Elementos variacionales

C1M3. Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares		
C2M1. Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo. **C2M2.** Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación. **C2M3.** Compara hechos, opiniones o afirmaciones para organizarlos en formas lógicas útiles en la solución de problemas y explicación de situaciones y fenómenos.	**C2.** Procesos de intuición y razonamiento	**S1.** Capacidad para observar y conjeturar **S2.** Pensamiento intuitivo **S3.** Pensamiento formal
C3M1. Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto. **C3M3**. Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático	**C3.** Solución de problemas y modelación	**S1.** Uso de modelos **S3.** Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios

para la solución de problemas propios del pensamiento matemático, de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno.		

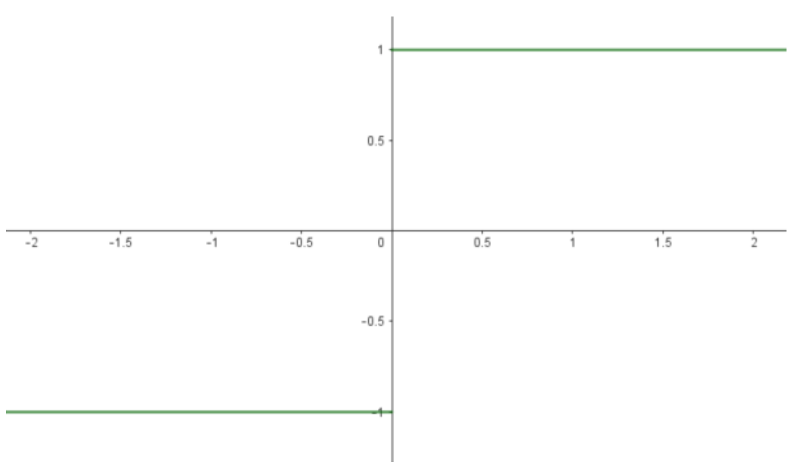
Anotaciones didácticas:

Considerando los aprendizajes de trayectoria de Pensamiento Matemático, se trata de abordar esta progresión retomando la progresión 15 de Pensamiento Matemático III, considerando lo abordado allí para ahondar más en este momento y observar la estrecha relación que hay entre la derivada y la integral mediante el Teorema Fundamental del Cálculo, brindando un espacio a la discusión de las gráficas y análisis entre ellas.

Se puede recuperar la discusión de la constante de integración realizada previamente en el cálculo de área por exceso o por defecto, pero ahora considerándola como un valor constante cualquiera que desaparece al momento de derivar, siendo que, al aplicar el proceso contrario se obtiene una constante cualquiera, resulta interesante dar estos dos sentidos a la constante C y hacer consciente al estudiantado de su importancia.

Se sugiere ahondar en ejemplo que promuevan el análisis de situaciones interesantes respecto a la comparación de las propiedades de una función, su derivada y su integral, como el siguiente,

Considérese la función $f(x) = |x|$ en el intervalo [-1,1], la derivada de dicha función $f'(x) = \frac{x}{|x|}$ es discontinua en el origen, teniendo la siguiente gráfica,



mientras que, al considerar la integral de $f(x) = |x|$ en este mismo intervalo es 2, más aún, considerando la expresión de la integral del valor absoluto,

$$\int_a^b |f(x)|dx = \int_a^c -f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

la integral es una función continua creciente.

Considerar ejemplos como estos y su comparación entre las funciones puede resultar en discusiones y procesos de razonamiento interesantes.

Progresión 6: Analiza situaciones-problema provenientes de Unidades de Aprendizaje Curricular que pueden ser modelados a partir del uso de ecuaciones diferenciales, por ejemplo, el crecimiento poblacional, la propagación de una enfermedad contagiosa o modelos más complejos como el modelo presa-predador o el modelo de Kuramoto, con lo cual pueda observar cómo problemas reales o fenómenos pueden describirse y entenderse a través de expresiones matemáticas, con lo cual examina la utilidad de la derivada y la integral, usando herramientas tecnológicas para la exploración.

Metas	Categorías	Subcategorías
C2M1. Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo. **C2M2.** Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación. **C2M3.** Compara hechos, opiniones o afirmaciones para organizarlos en formas lógicas útiles en la solución de problemas y explicación de situaciones y fenómenos.	**C2.** Procesos de intuición y razonamiento	**S1.** Capacidad para observar y conjeturar **S2.** Pensamiento intuitivo **S3.** Pensamiento formal
C3M1. Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto. **C3M3**. Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del pensamiento matemático, de áreas de conocimiento, recursos	**C3.** Solución de problemas y modelación	**S1.** Uso de modelos **S3.** Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios

sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno.		
C4M1. Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural	**C4.** Interacción y lenguaje matemático	**S1.** Registro escrito, simbólico algebraico e iconográfico

Anotaciones didácticas:

No se pretende que el estudiantado resuelva ecuaciones diferenciales en esta progresión, sino que entienda como la derivada puede representar tasas de variación y cambio para representar problemas reales en expresiones más complejas, más aún, que observe que mediante el uso de la integral como proceso contrario y el Teorema Fundamental del Cálculo es posible solucionarlas, sin que esto implique realizar los procesos algebraicos de solución.

Se sugiere abordar primero un fenómeno que pueda describirse con una ecuación diferencial, como el crecimiento poblacional donde la variación de la población en un instante del tiempo es proporcional al tamaño de esta, establecer el modelo,

$$P'(t) = kP(t)$$

donde *P(t)* es el tamaño de la población en el tiempo *t* y *k* la constante de proporcionalidad.

Y su solución,

$$P(t) = Ce^{kt}$$

mostrar su gráfica y analizar algunos ejemplos donde pueda determinarse la población de un censo o el crecimiento de una comunidad de bacterias considerando, las condiciones iniciales de tiempo y población inicial

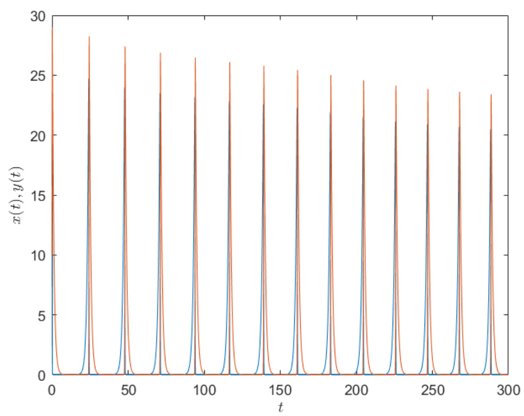
Posteriormente puede considerarse un ejemplo donde se use más de una ecuación diferencial para modelar un fenómeno, como el modelo presa-predador, con las ecuaciones Lotka-Volterra, considerando el modelo,

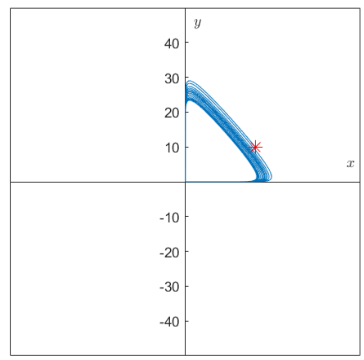
$$\frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y)$$

$$\frac{dy}{dt} = x(\gamma - \delta y)$$

donde y es el número de predadores y x el número de presas, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son constantes de interacción cuyos signos representan las interacciones entre especies. Algunas preguntas que pueden plantearse aquí es ¿qué ocurre si se cambian los signos de estas constantes? ¿qué modelarán o representarán?

Resulta de gran importancia observar gráficas de esta interacción para entender la dinámica poblacional y observar cómo cuando una población crece, la otra decrece y cómo entre éstas mantienen un “control” natural y equilibrio de las mismas. Es decir, las poblaciones no pueden crecer de manera infinita.





Puede resultar interesante analizar o comentar situaciones y fenómenos como el problema de los tres cuerpos, para que el estudiantado observe modelos que no siempre son tan fáciles de representar, solucionar o determinar su comportamiento, siendo estos sensibles a condiciones iniciales y caóticos, es importante hacer de conocimiento al estudiantado como los modelos matemáticos son esenciales para el estudio y entendimiento de estos fenómenos, que aunque no son cotidianos, son importantes de estudiar y describir para el desarrollo científico humano.

Se integra código en MATLAB para generar las gráficas y trabajar con el sistema Presa-Predador.

https://drive.google.com/file/d/1vUjB-1nMGGIgqXsBDLlTeEhQ3mOBlsQ_/view?usp=sharing

Progresión 7: Considera los métodos numéricos como procesos matemáticos iterativos que permiten aproximar una solución con cierto margen de error, revisa algunos de los métodos más populares. como el método de bisección, el método de aproximaciones sucesivas o el método Newton-Raphson, haciéndose consciente que, la iteración numérica puede provocar resultados totalmente diferentes dependiendo del redondeo o truncamiento numérico, con lo cual da partida para explorar la definición de sistemas caóticos y sensibilidad de condiciones iniciales en sistemas.

Metas	Categorías	Subcategorías
C1M1. Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno. **C1M2.** Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto. **C1M3.** Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares	**C1.** Procedural	**S1.** Elementos aritmético-algebraicos **S3.** Elementos variacionales
C3M3. Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del pensamiento matemático, de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno. **C3M4.** Construye y plantea posibles soluciones a problemas de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno, empleando técnicas y lenguaje matemático.	**C3.** Solución de problemas y modelación	**S3.** Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios

Anotaciones didácticas:

En esta progresión se busca acercar al estudiantado a la exploración de métodos de solución numéricos, para que pueda hacerse consciente de qué caminos se toman cuando los métodos analíticos no funcionan, siendo en la mayoría de las ocasiones este el caso. No se espera que se estudie a la perfección el funcionamiento de los algoritmos en cuestiones procedimentales, sino que se entienda que existen para abrir paso a la solución de ecuaciones diferenciales o sistemas de éstas y los aplique para hallar algunas raíces o soluciones a funciones.

Sin embargo, también se busca que la progresión abone a la exploración del caos y la sensibilidad a condiciones iniciales, es decir, mostrar que no todos los sistemas pueden solucionarse incluso usando acercamientos numéricos, pues muchas veces los modelos presentan comportamientos caóticos bajo ciertas condiciones, se puede retomar lo abordado en la progresión 1 de esta UAC y explorar ejemplos sencillos de sistemas dinámicos como el tomar un número decimal, elevarlo al cuadrado y restar uno, aplicar esta función en dos calculadoras diferentes, por ejemplo, en una calculadora científica y en una calculadora en línea, iterar muchas veces y observar que se obtienen resultados completamente diferentes conforme crece el número de iteraciones, este tipo de comportamientos se dan debido al caos en el sistema y el truncamiento de los dígitos de las calculadoras, siendo que ambas están en lo correcto ¿por qué dan resultados diferentes?. Estos abordajes, sencillos pueden ser muy útiles para abordar el concepto de caos y despertar el interés en el estudiantado.

Otro ejemplo muy interesante es considerar el fenómeno del péndulo doble y el estudio del orden del caos y cómo mediante el estudio de ello se puede explicar incluso el porqué conocemos a personas en el día a día debido a situaciones que parecen determinadas de manera aleatoria. Además se sugiere aprovechar la situación para hacer ver la estrecha relación que existe entre los fractales y el caos, considerando el diagrama de Feigenbaum, incluso puede explorarse su construcción a partir de la ecuación logística o aplicación logística,

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n).$$

y usar software para su construcción en caso de disponer de él.

Resulta un momento importante para adentrar al estudiantado en el desarrollo de investigación matemática, cuáles son los problemas que surgen de interés para la comunidad científica actual y el porqué al día de hoy sigue siendo una rama muy prolífera de investigación científica, pues, los métodos analíticos presentan limitaciones al momento de resolver, al llegar a estas limitaciones, se acude a usar los métodos numéricos, sin embargo, en muchos de los casos nos encontramos con sistemas caóticos y caos, siendo así necesario la exploración y entendimiento de estos comportamientos.

IV. Transversalidad

Entendemos por transversalidad al enfoque de alta interacción entre áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos y recursos socioemocionales del MCCEMS. Estudios que poseen cierta relación con dicha concepción (Eronen, L., et al., 2019, Drake, S. M., & Burns, R. C., 2004) nos hablan de un espectro que comprende lo multidisciplinario (diferentes disciplinas se integran alrededor de un tema común), lo interdisciplinario (la organización curricular alrededor de aprendizajes comunes a través de disciplinas) y la transdisciplinariedad (basada en interrogantes que las y los estudiantes pueden hacerse y en sus inquietudes por desarrollar habilidades para la vida real dentro de contextos reales). Al ser integrado como un recurso sociocognitivo al MCCEMS, el pensamiento matemático adquiere una función transversal dentro de dicha estructura. Esto no implica que todo cuanto se trabaje con las y los estudiantes acerca del pensamiento matemático deba de transversalizarse, pues existirán momentos en que la disciplina demande trabajo sobre sí misma para poder continuar con un desarrollo integral.

El pensamiento matemático al posicionarse junto con los demás recursos sociocognitivos cumple una función de soporte para que el estudiantado pueda consolidar sus conocimientos de las demás áreas. Son evidentes los puntos de encuentro entre el pensamiento matemático y las ciencias sociales (al estudiar fenómenos económicos o poblaciones, por poner un par de ejemplos), con las ciencias naturales, experimentales y tecnología (al hacer uso del lenguaje matemático para describir diversas leyes de la física o la química, al utilizar modelos matemáticos para ayudar en la explicación de algunos sistemas biológicos, etc.), con las humanidades (partiendo del hecho de que la propia matemática es obra creativa del ser humano y que muchas veces ha estado inmersa en diversos desarrollos artísticos).

El pensamiento geométrico que se desarrolla principalmente en esta UAC resulta esencial para fomentar el pensamiento matemático y el razonamiento del estudiantado, mismo que da partida al estudio de los demás recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y áreas de conocimiento, donde son evidentes puntos de encuentro en el análisis y entendimiento de las formas, estructuras y espacios. El entendimiento e interpretación del entorno depende especialmente de nuestra relación con su forma, el estudio de figuras geométricas que se encuentran en él y de su análisis, el estudio de los elementos y propiedades de las figuras geométricas, sus relaciones y el planteamiento analítico de rectas, curvas y cónicas, lo anterior para el estudio de los entes abstractos en todas las ciencias.

Es importante decir que la transversalidad tanto con áreas de conocimientos como con recursos socioemocionales y sociocognitivos puede operar en dos niveles fundamentales: en un primer nivel a través de esos puntos de contacto existentes con las demás disciplinas a las que nos referíamos en el párrafo anterior; pero también en un segundo nivel, si se quiere más profundo, en donde la interiorización de las habilidades relacionadas con el pensamiento matemático permiten una mejor comprensión, una ordenación mental más clara y permiten también una mayor profundidad dentro de las demás experiencias cognitivas.

A pesar de la importante función que se le otorga al pensamiento matemático, no debemos olvidar que nosotras y nosotros, como docentes de pensamiento matemático, no tendremos necesariamente un lugar protagónico en la escuela.

El trabajo colaborativo, tan esencial para el desarrollo del programa aula, escuela y comunidad, asume interacciones profesionales y respetuosas en la que todas y todos los agentes involucrados en la educación, entre los que nos encontramos nosotros y las y los colegas de otras áreas y recursos, valoren la función y las aportaciones de todos los demás.

Más aún, es necesario que logremos enseñar con perspectiva socioemocional, pues enseñamos a seres humanos que merecen todo nuestro respeto y también debido a que logrando consolidar un ambiente de confianza mutua podremos desempeñar mejor nuestra importante labor.

V. Recomendaciones para el trabajo en el aula y la escuela

En este apartado se brinda una propuesta de trabajo en el aula y la escuela, se enuncian los siguientes ejemplos que brindan una orientación metodológica para abordar las progresiones. Enseguida se presentan algunos ejemplos didácticos de cómo se pueden abordar algunas progresiones. Se sugieren tres momentos principales para su abordaje.

Momento 1. Identificar la progresión y comprender sus componentes.

Momento 2. Diseñar un plan de clase para alcanzar las metas de aprendizaje.

Momento 3. Diseñar una evaluación y considerar el proceso de retroalimentación

VI. Evaluación formativa del aprendizaje

Para profundizar sobre el tema de evaluación formativa y la retroalimentación se sugiere revisar el documento de Orientaciones para la Evaluación del Aprendizaje en el siguiente enlace:

https://dgb.sep.gob.mx/storage/recursos/2024/04/6mL0WsYtNp-Orientaciones-para-la-evaluacion-del-aprendizaje-(1).pdf

VII. Recursos didácticos

Las siguientes fuentes de información constituyen sugerencias de apoyo para el abordaje de las progresiones, no son limitativas, ni restrictivas. El personal docente podrá usar estas y también podrá utilizar las que considere adecuadas según sus necesidades y contexto.

Básica

- Ayres, F. (2013). *Cálculo*. McGraw Hill. ISBN: 9781456203276.
- Devaney, Robert L. (2003). An introduction to Chaotic Dynamical Systems. CRC Press. ISBN. 9780813340852.
- Granville W. A. (1997), *Cálculo Diferencial e Integral.* Limusa Noriega Editores. ISBN: 968181178X.
- King-Dávalos, J. y Méndez-Lango, H. (2014). Sistemas Dinámicos Discretos. UNAM. ISBN: 9786070252631.
- Leithold, L. (1994). *El cálculo*. Oxford University Press. ISBN: 9706131825.
- Stewart, J. (2018). Cálculo de una variable: trascendentes tempranas. Cengage Learning México. ISBN: 9786075265505.
- Zill, D. (2002). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado. Thomson Learning. ISBN 9706861211.

Complementaria

- Adams, R. (2009). *Cálculo*. Pearson. ISBN 9788478290895.
- Apostol, T. (2006). *Cálculo de una variable con funciones de una variable con una introducción al Álgebra Lineal*. Reverté. ISBN 9788429150025.
- Arizmendi, H., Carrillo, A. M. y Lara, M. (1987). *Cálculo Primer Curso.* Addison Wesley Iberoamericana. ISBN. 9686630295.
- Barnett, R. (2012). *Precálculo: funciones y gráficas*. Cengage Learning.

ISBN: 9789781322242.

- Cantoral, R. (2014). *Precálculo, un enfoque visual*. Pearson. ISBN: 9786073223300.
- Demana, F. (2007). *Precálculo: gráfico, numérico, algebraico.* Addison Wesley Longman. ISBN: 9789702610168.
- Imaz , C. y Moreno, L. (2013). *Cálculo. Su evolución y enseñanza*. Trillas ISBN: 9786071717481.
- Larson R. (2018). Matemáticas I Cálculo diferencial. CENGAGE. ISBN: 9786075266480.
- Larson, R. (2018). *Precálculo: introducción a las matemáticas universitarias*. Cengage Learning. ISBN: 9786075266848.
- Larson, R. (2023). *Cálculo Diferencial*. Cengage Learning. ISBN: 9786075701677.
- Leithold, L. (2003). *Matemáticas previas al cálculo*. Oxford University Press. ISBN: 9789706131829.
- Toledo, P. (2019). *Brevísima introducción a los sistemas dinámicos con enormes ejemplos demoníacos.* UV.
- SEMS a. (2023). *Orientaciones Pedagógicas del Recurso Sociocognitivo de Pensamiento Matemático.* Obtenido de https://educacionmediasuperior.sep.gob.mx/work/models/sems/Resource/13634/1/images/Orientaciones%20pedag%C3%83%C2%B3gicas%20-%20Pensamiento%20Matem%C3%83%C2%A1tico%20.pdf
- SEMS b. (2023). *Programa de estudio del recurso sociocognitivo Pensamiento Matemático I*. Obtenido de https://educacionmediasuperior.sep.gob.mx/work/models/sems/Resource/13634/1/images/Pensamiento%20Matem%C3%83%C2%A1tico%20I.pdf
- SEMS c. (2023). *Programa de estudio del recurso sociocognitivo Pensamiento Matemático II.* Obtenido de https://educacionmediasuperior.sep.gob.mx/work/models/sems/Resource/13634/1/images/Pensamiento%20Matematico%20II.pdf
- SEMS d. (2023). *Programa de estudio del recurso sociocognitivo Pensamiento Matemático III*. Obtenido de https://educacionmediasuperior.sep.gob.mx/work/models/sems/Resource/13634/1/images/Pensamiento%20Matematico%20III.pdf
- Santaolalla J.[Date un Vlog] (2024). Fractales y Caos: Cuando el Caos Nace del Orden [Video]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=Tt-jjxjTHTQ
- Simón Mochón (1994). *Quiero entender el cálculo: un enfoque basado en conceptos y aplicaciones*. Grupo Editorial Iberoamérica. ISBN: 9706250514

- Silva, J. (2010). *Fundamentos de Matemáticas: álgebra, trigonometría, geometría analítica y cálculo*. Limusa. ISBN 9789681867591.
- Smith, R. (2019). *Cálculo de una variable con trascendentes tempranas*. McGraw Hill. ISBN 9781456269937.
- Stewart, J. et al. (2024). *Precálculo: Matemáticas para el cálculo*. Cengage. ISBN 9786075702094.
- Swokowski, E. y Cole, J. (2018). *Precálculo: Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. Cengage Learning. ISBN:9786077254867.
- Swokowski, E. (1989). Cálculo con geometría analítica. Grupo editorial Iberoamérica. ISBN: 9687270438.
- Thomas, G. (2015). *Cálculo. de una variable & AccMymathlab*. Pearson Educación. ISBN 9789702627869.
- Vázquez-García, R. y Barros-Sierra, J. (1946). *Introducción al Cálculo Diferencial e Integral*. Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). ISBN. 9684520417
- Wisniewski, P. (2015). Cálculo diferencial e Integral. Matemáticas VI. Trillas. ISBN 9786071722720.
- Zavaleta-Viveros J.A. (2019). *Dinámica del Modelo de Nagumo-Sato para una neurona.* UV. Recuperado de https://cdigital.uv.mx/server/api/core/bitstreams/45c6f402-a578-4e70-8e72-f73d6e043238/content
- Zill, D. y Dewar, J. (2012). *Precálculo con avances de cálculo*. McGraw Hill. ISBN: 9786071507150.
- Zill, D., Wright, W.S. (2011). Cálculo de una variable: Trascententes tempranas. McGraw-Hill. ISBN 9786071505019.

Electrónica:

- El Aula Enriquecida con Tecnología Digital https://www.imat-x.com/aetd
- Cálculo diferencial e Integral. Libro Interactivo. Módulo II https://www.mycdisenos.com/lia_calculo2/
- Cálculo diferencial Interactivo https://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/Libro_Calculo_Diferencial-JS/index.html
- Cálculo diferencial. Libro Interactivo. Módulo I https://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/Calculo_Diferencial_e_Integral_I/index.html
- Cálculo diferencial. Khan Academy https://es.khanacademy.org/math/differential-calculus

- Geogebra. Graficador y herramienta para geometría https://www.geogebra.org/?lang=es
    - **Límite.** *El interactivo permite desarrollar la noción de límite de manera visual.* https://www.geogebra.org/m/kkxjmgmf
    - **Skater.** *Exploración conceptual de la derivada.* https://www.geogebra.org/m/ZhrFZgAs
    - **Derivadas e Integrales.** *Generador de ejercicios para obtener derivadas e integrales inmediatas.* https://www.geogebra.org/classic/cdxj6vwc
- WolframAlpha. Software y herramienta poderosa para el desarrollo de matemáticas en general. https://www.wolframalpha.com/
- Aplicacion para celular calculadora para cálculo diferencial y cálculo integral “Symbolab” https://es.symbolab.com/
- Recursos didacticos para profesores https://appsparaprofes.com/tabla/

VIII. Rol docente

Realizar una evaluación final y sumativa en la que se explique al estudiantado en qué consiste la valoración del producto designado.

Compartir los propósitos educativos y los criterios de logro o metas de aprendizaje con tus estudiantes.

Diseñar e implementar actividades que evidencien lo que el alumnado está aprendiendo.

Ofrecer retroalimentaciones formativas sobre los productos que estén elaborando.

Mediador del aprendizaje.

Promotor del pensamiento crítico y guía del estudio independiente.

Como parte del proceso metacognitivo donde las y los estudiantes deben autoevaluarse y coevaluarse se sugiere tener presente preguntas como:

¿A dónde voy? (que permite establecer reglas)

¿Cómo voy? (favorece el monitoreo del aprendizaje)

¿A dónde ir ahora? (donde requiere la revisión de su trabajo y ajustes necesarios)

¿Para qué me sirve lo que acabo de aprender? (otorga relevancia a los aprendizajes)

¿Cómo trabajó mi compañero?

¿Cómo podemos mejorar como equipo?

IX. Rol del estudiantado

El rol del estudiantado en el proceso educativo no se limita simplemente a recibir información y repetirla, sino que debe ser un agente activo en la construcción de su propio conocimiento y de su identidad. En este sentido, no sólo se trata de aprender a leer y escribir; implica aprender a narrar y comprender su propia vida, tanto como autor o autora de su historia personal, como testigo de su contexto social y cultural. Este proceso es fundamental para que el estudiantado se convierta en un sujeto consciente y crítico de su realidad.

La educación es un motor de transformación social, pero también puede perpetuar las desigualdades existentes al tratar a todos y todas por igual sin considerar la diversidad inherente al estudiantado. La educación debe empoderarles, dándoles las condiciones necesarias para reconocer y cuestionar las desigualdades que les rodean.

Si las y los estudiantes son insertados en una educación que no considera su clase, sexo, género, etnia, lengua, cultura, capacidad, condición migratoria, religión o cualquier otro aspecto de su identidad, es muy probable que se apropien de la idea de que “la escuela no es para ellos y ellas”, ya que se enfrentarían constantemente a comentarios o actitudes que les califican de incapaces, ignorantes, indolentes o inútiles terminando por creerlo y asumirlo como verdad. Esta autodesvalorización es una barrera significativa para su desarrollo ya que puede llevar a creer que el conocimiento y la sabiduría pertenecen únicamente a las y los "profesionales" y no reconocen el valor de su propio conocimiento y experiencia.

El rol de las y los estudiantes, entonces, debe ser el de un sujeto activo que desafía y transforma estas narrativas opresivas que fomentan las desigualdades. Debe aprender a valorar su propia voz y experiencia, y a reconocer su capacidad para conocer y transformar su realidad. La educación debe ser un proceso liberador que les permita verse a sí mismos o mismas como agentes de transformación social, capaces de escribir su propia historia y de participar activamente en la construcción de una sociedad más justa y humana.

X. Tecnologías de la Información, Comunicación, Conocimiento y Aprendizaje Digital (TICCAD)

La implementación de las TICCAD en la planeación didáctica representa una oportunidad para enriquecer la experiencia educativa, al facilitar el desarrollo de las habilidades, saberes y competencias digitales, potenciar la creatividad y motivación del estudiantado y favorecer la labor del profesorado. (Aprende.mx, 2022).

Al transversalizar el uso de las TICCAD, se busca integrar sus herramientas de manera horizontal a lo largo de todas las Unidad de Aprendizaje Curricular, en lugar de relegarlas a un recurso sociocognitivo específico. Esto permite que las y los estudiantes desarrollen habilidades digitales de manera progresiva y coherente a lo largo de su formación académica, independientemente del área de conocimiento en la que se encuentren.

No obstante, resulta crucial que la integración de las TICCAD se realice considerando las particularidades de cada plantel, su infraestructura, el nivel de competencia digital del personal docente y el estudiantado, así como los recursos disponibles. De esta manera, se garantiza que estas herramientas se utilicen de manera efectiva y se maximice su impacto en el proceso educativo.

Al integrar las TICCAD en la planeación didáctica de acuerdo con las posibilidades de cada plantel, las y los docentes pueden enriquecer el proceso de enseñanza y aprendizaje, promoviendo la participación activa de sus estudiantes, fomentando el pensamiento crítico y creativo, y facilitando el acceso a una educación de excelencia para todos y todas.

XI. Referencias

ACUERDO número 09/05/24 que modifica el diverso número 09/08/23 por el que se establece y regula el Marco Curricular Común de la Educación Media Superior. Secretaría de Educación Pública. DOF. (2024) Fecha de citación [06-06-2024]. Disponible en formato HTML: https://www.dof.gob.mx/nota_detalle.php?codigo=5729564&fecha=05/06/2024#gsc.tab=0

Aprende.mx. (1 de mayo de 2022). TICCAD. Nueva Escuela Mexicana. Recuperado de: https://nuevaescuelamexicana.sep.gob.mx/detalle-recurso/20711/

ACUERDO número 09/08/23 por el que se establece y regula el Marco Curricular Común de la Educación Media Superior. Secretaría de Educación Pública. DOF. (2023) Fecha de citación [11-01-2024]. Disponible en formato HTML: https://www.dof.gob.mx/nota_detalle.php?codigo=5699835&fecha=25/08/2023#gsc.t

Aprende.mx. (1 de mayo de 2022). TICCAD. Nueva Escuela Mexicana. Recuperado de: https://nuevaescuelamexicana.sep.gob.mx/detalle-recurso/20711/

Dirección General del Bachillerato. (2023). *Orientaciones para la Evaluación del Aprendizaje*. DGB.

Dirección General del Bachillerato. (2024). *Orientaciones Psicopedagógicas para la Elaboración de Programas de Estudio y Progresiones de Aprendizaje*. DGB.

Subsecretaría de Educación Media Superior. (2023f). *Progresiones de Aprendizaje del Recurso Sociocognitivo Pensamiento Matemático I.* SEP.

Créditos

Elaborador 2DA mesa

José Alfredo Zavaleta Viveros
Colegio de Bachilleres del Estado de Veracruz

Elaboradores y elaboradoras 1RA mesa

Javier Alejandro Sulub Ruz
Colegio de Bachilleres del Estado de Campeche

Rigoberto Vázquez Suriano
Colegio de Bachilleres del Estado de Chiapas

Concepción Valenzuela García
Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora

Gabriela Medina Escobar
Colegio de Bachilleres del Estado de Sinaloa

Laura Hortencia Muro González
Colegio de Bachilleres del Estado de Morelos

Yajaira Selene Quevedo Pillado
Preparatoria Federal "Lázaro Cárdenas" 1/1

Manuel Hermoso Bandala
Colegio de Bachilleres del Estado de Veracruz

José Luis Razo Montiel
Colegio de Bachilleres del Estado de Hidalgo

José Ángel Bartolomé Pérez
Colegio de Bachilleres del Estado de Puebla

Asesor COSFAC

Andrés Alonso Flores Marín

Asesor Especial

Alejandro Javier Díaz Barriga Casales

Personal académico de la Dirección General del Bachillerato que coordinó

Jorge Alejandro Rangel Sandoval

Brenda Nalleli Durán Orozco

Mercedes Gabriela Castro Nava

Juan Miguel Hernández González

Héctor Franco Gutiérrez

Saúl Ramón Hernández Bocanegra

La construcción de estas Progresiones de Aprendizaje no hubiera sido posible sin la valiosa contribución y retroalimentación de las y los docentes de Educación Media Superior a lo largo de todo el país.

La Dirección General del Bachillerato agradece y reconoce a todas las personas que colaboraron en la construcción de este documento con sus valiosas aportaciones.

Educación

Secretaría de Educación Pública

ESTADOS UNIDOS MEXICANOS

DGB